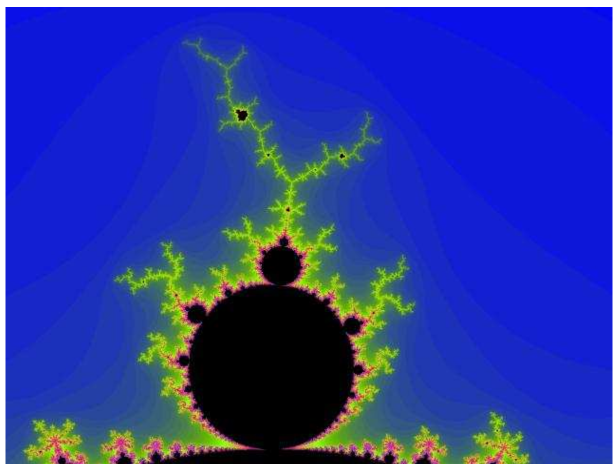
1 LOS NÚMEROS COMPLEJOS

1.1 ¿Imaginámos la realidad?

¿Cómo distinguir entre lo real y lo imaginario? La realidad de mi abuela es que sus ojos ven de forma muy concreta el abuelo muerto años atrás. Lo que para mi es algo imaginario (trampita de la mente) para ella es realidad.
¿Cuántos nos hemos levantado sudando o llorando después de un mal sueño? El sueño en ese instante era una realidad...
Asumiendo como realidad lo que la mente acepta como tal, nos atrevemos a afirmar que los números imaginarios no son tan imaginarios, son entidades concretas que nuestra mente puede ver, tocar y manipular. Los números "complejos" no son tan complejos o tan imaginarios como lo indica su nombre, mas aún, son tan concretos que gracias a ellos hasta un viejo computador 286 puede pintar fractales tan hermosos como el de Mandelbrot



1.2 Ampliando el conjunto numérico

Ante el problema de solucionar ecuaciones de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$, se encontraron situaciones en las cuales el conjunto de los Números Reales no era suficiente, por ejemplo :
Si $x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1$ Esta ecuación no tiene solución en $\mathbb{R}$, ya que $x = \sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{Sea } n \text{ un entero no negativo ; } \sqrt[2n]{a} \text{ es es un número real si y sólo sí } a \geq 0}$$

No pudiéndose satisfacer algunas ecuaciones en $\mathbb{R}$, nos vimos en la necesidad de ampliar el conjunto numérico, llegando hasta los mal llamados números complejos (son muy sencillos).

Definición 1 *Asumimos que i es el número que elevado al cuadrado es igual a -1. Nos referiremos a i como la unidad imaginaria, $\left(i = \sqrt{-1}\right)$ y diremos que si b es un número real; entonces bi es un número imaginario.*

Bajo la idea anterior, y siguiendo las leyes comunes de la potenciación podemos afirmar que:

$$\begin{aligned}
i^1 &= \sqrt{-1} \\
i^2 &= -1 \\
i^3 &= i^2 \cdot i = -i \\
i^4 &= i^2 \cdot i^2 = 1 \\
&\vdots \\
i^{45} &= \left(i^4\right)^{11} \cdot i = i \text{ Recuerda que } 45 = 4 \cdot 11 + 1 \\
&\vdots \\
i^{243} &= \left(i^4\right)^{60} \cdot i^3 = -i
\end{aligned}$$

También podemos afirmar que:

$$\begin{aligned} \sqrt{-4} &= \sqrt{4\cdot(-1)} &= \sqrt{4}i = 2i \\ \sqrt{-3} &= \sqrt{3\cdot(-1)} &= \sqrt{3}i \end{aligned}$$

Actividad 1.

1. Hallar las soluciones de cada una de las siguientes ecuaciones:

   (a) $x^2+9=0$
   (b) $x^2-x+17=0$
   (c) $x^2-x-2=0$
   (d) $2x^2-18=0$
   (e) $-x^2-9=0$
   (f) $x^4-2x^2-3=0$

2. ¿Son las soluciones halladas números reales?

3. Representa gráficamente cada una de las funciones cuadráticas asociadas con el primer punto.

   (a) $y=x^2+9$
   (b) $y=x^2-x+17$
   (c) $y=x^2-x-2$
   (d) $y=2x^2-18$
   (e) $y=-x^2-9$
   (f) $y=x^4-2x^2-3$

4. Cuando las raíces de la ecuación cuadrática no son números reales, ¿la gráfica de la función cuadrática correspondiente interseca al eje x? ¿Por qué?

5. ¿Hay alguna relación entre los cortes con el eje x y las raices? ¿Qué ocurre cuando la ecuación asociada tiene soluciones reales?

6. ¿La solución de la ecuación $x^2+1=0$ es un número real? Justificar.

7. Verifica que $i, -i, 1$ y -1 son raíces de la ecuación $x^4-1=0$.

Definición 2 *Un número de la forma* $\mathbf{a}+\mathbf{bi}$, *con* a *y* b *números reales, e* $i=\sqrt{-1}$, *lo llamaremos* ***número complejo****;* a *se llama* ***parte real*** *y* b, ***parte imaginaria****.*

$$\mathbb{C}=\left\{a+bi \mid a\in\mathbb{R},\ b\in\mathbb{R},\ \wedge\ i=\sqrt{-1}\ \right\}$$

Ejemplos:

1. $z=3-2i$ es un número complejo.

2. $w=-5$ es un número complejo, ya que se puede escribir como $-5+0i$.

3. $\alpha=2i$ es un número complejo, ya que se puede escribir como $2i=0+2i$.

Definición 3 *Dos complejos son iguales si sus componentes son iguales. Sea* $z,w\in\mathbb{C}$ *tal que* $z=a_1+b_1i$ *y* $w=a_2+b_2i$ *;* $z=w$ *si y sólo sí* $a_1=a_2$ *y* $b_1=b_2$.

Actividad 2.

1. ¿Son los números reales también números complejos?

2. ¿Son los números de la forma bi números complejos?

3. Si $z=x+2yi$ y $w=(4+y)+(x-1)\,i$. Encontrar los valores de los números reales x y y para los cuales se satisface $z=w$.

Definición 4 *Las operaciones de adición y multiplicación en complejos se realizan de manera idéntica a las de polinomios.*
Sean $z = a_1 + b_1 i$ *y* $w = a_2 + b_2 i$ *dos números complejos* $(z, w \in \mathbb{C})$*, se define:*

$$\begin{aligned} z + w &= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\, i \\ z \cdot w &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2)\, i \end{aligned}$$

Nótese que "el menos" en el producto resulta porque $i^2 = -1$.

Ejemplo: Si $z = -3 + 5i$ y $w = 4 + 2i$, entonces

1. $z + w = 1 + 7i$
2. $z \cdot w = (-12 - 10) + (-6 + 20)\, i = -22 + 14i$

1.2.1 Propiedades de las operaciones en $\mathbb{C}$

Sean $z = (a_1 + b_1 i)$ $w = a_2 + b_2 i$ y $\alpha = a_3 + b_3 i$ números complejos, entonces

1. $z+w = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\, i$ y como $(a_1 + a_2) \in \mathbb{R}$ y $(b_1 + b_2) \in \mathbb{R}$, tenemos que $z+w$ es un número complejo. (Clausura de la adición en $\mathbb{C}$).
2. $z + w = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\, i = (a_2 + a_1) + (b_2 + b_1)\, i = w + z$. Luego $z + w = w + z$. (Conmutativa de la adición en $\mathbb{C}$).
3. $$\begin{aligned} z + (w + \alpha) &= (a_1 + b_1 i) + ((a_2 + a_3) + (b_2 + b_3)\, i) \text{ por def. de + en } \mathbb{C} \\ &= (a_1 + (a_2 + a_3)) + (b_1 + (b_2 + b_3))\, i \text{ como } \mathbb{R} \text{ es asociativo con +} \\ &= ((a_1 + a_2) + a_3) + ((b_1 + b_2) + b_3)\, i \text{ def. de + en } \mathbb{C} \\ &= ((a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\, i) + (a_3 + b_3 i) \text{ def. de + en } \mathbb{C} \\ &= (z + w) + \alpha \text{ luego } \mathbb{C} \text{ es un conjunto asociativo con +.} \end{aligned}$$
4. $\forall z \in \mathbb{C}$, $\exists 0 \in \mathbb{C}$ tal que $z + 0 = z$. (Existencia del módulo para +).

   Como $0 = 0 + 0i$ entonces $0 \in C$ y $z + 0 = (a + 0) + (b + 0)\, i = a + bi = z$.■
5. $\forall z \in \mathbb{C}\ \exists -z \in \mathbb{C}$ tal que $z + (-z) = 0$. (Existencia del inverso aditivo).

   Sea $a + bi$ un complejo conocido y $x + yi$ un número complejo tal que

   $$\begin{aligned} (a + bi) + (x + yi) &= 0 \\ (a + x) + (b + y)\, i &= 0 + 0i \end{aligned}$$

   Para que sean iguales, se debe cumplir que $(a + x) = 0$ y $(b + y) = 0$. Estas dos ecuaciones están en $\mathbb{R}$ y tienen como única solución $x = -a$ y $y = -b$, luego el opuesto aditivo de $z = a + bi$ lo podemos simbolizar como $-z = -a - bi$. ■
6. Supongamos que $z = x+yi$ con x, y números reales. En particular, si $z \neq 0$ se tiene que $x \neq 0 \vee y \neq 0$ llevándonos a pensar que $z \cdot \dfrac{1}{z} = 1$. Faltaría ver si en verdad $\frac{1}{z}$ que lo podemos llamar z^{-1} es un número complejo.

   $$\begin{aligned} \frac{1}{z} &= \frac{1}{x + yi} \\ z^{-1} &= \frac{1}{x + yi} \cdot \frac{x - yi}{x - yi} \\ z^{-1} &= \frac{x - yi}{x^2 + y^2} \\ z^{-1} &= \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2} i \end{aligned}$$

De este modo el inverso multiplicativo de $z \neq 0$ lo denotaremos como z^{-1} y de lo anterior ya sabemos cómo encontrarlo una vez conocido z.

Se deja al lector el estudio y demostración de las propiedades para el producto.

.

Actividad 3.

1. Si $z = 2 + 3i$, $w = 5 - 2i$ $u = -3 - 2i$ calcular:

   (a) $z + w$
   (b) $w + u$
   (c) $z \cdot w$
   (d) $u \cdot w$
   (e) $u\,(w + z)$
   (f) $uw + uz$

2. Determinar el ó los valores de $u \in \mathbb{C}$ para los cuales se satisface que $u \cdot u = -u$.

3. Exprese $2i^{-3}$ como producto de un número real por i.

4. Calcular $\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}\right)$.

5. Verificar que las soluciones de $x^3 = 1$, son $\{x = 1\}, \left\{x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}\right\}, \left\{x = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}\right\}$.

6. Resta y cociente de números complejos. Si entendemos

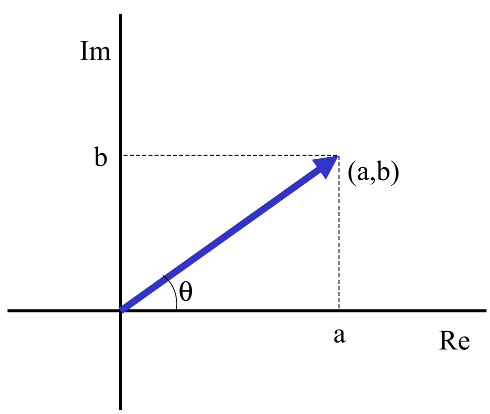
$$\begin{aligned} z - w &= z + (-w) \\ \frac{z}{w} &= z \cdot w^{-1} \qquad \text{siendo } w \neq 0. \end{aligned}$$

   Calcular:

   (a) $[3 - 4i] - [1 + 2i]$
   (b) $[-8 + 3i] - [-10 + i]$
   (c) $\dfrac{2 + i}{3 + 4i}$
   (d) $\dfrac{7 - 3i}{2i}$
   (e) Dividir $5 + 7i$ en 3.

.

1.3 El plano Complejo



Para el caso si $z = a + bi$, la coordenada real de z es a y la coordenada imaginaria para z decimos que es b.

Definición 5 *Sean a, b números reales, $z = a + bi$ si y sólo sí $z = (a, b)$. Asumimos que la parte real de z es $\operatorname{Re}(z) = a$ y que la parte imaginaria de z es $\operatorname{Im}(z) = b$. Además, si un complejo está expresado como $z = a + bi \vee z = (a, b)$ decimos que está escrito en su forma cartesiana.*

Ejemplo. Si $w = -3 + 5i$, entonces $w = (-3, 5)$, $\mathrm{Re}\,(w) = -3 \wedge \mathrm{Im}\,(w) = 5$.
Notemos que para cada punto del plano corresponde un número complejo y viceversa. Podemos entender el conjunto de los complejos como el conjunto de puntos en el plano (o de vectores) con la adición y multiplicación definida de la siguiente forma:

Definición 6 *Adición y multiplicación de complejos.*
Sean los complejos $z = (a_1, b_1)$ *y* $w = (a_2, b_2)$, *se define:*

$$\begin{aligned} z + w &= (a_1 + a_2,\ b_1 + b_2). \\ z \cdot w &= (a_1 a_2 - b_1 b_2,\ a_1 b_2 + b_1 a_2). \end{aligned}$$

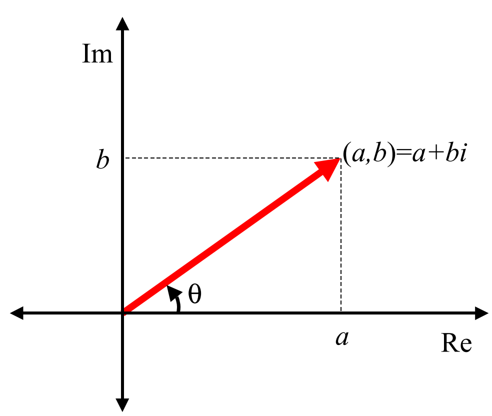
¿Está de acuerdo con la definición anterior? Compare la definición anterior con la definición (4). ¿Explique?
Ejemplos.

1. Si $z = (5, 4)$ y $w = (-2, 3)$, entonces, $z + w = (5 - 2, 4 + 3) \Rightarrow z + w = (3, 7)$ y
   $z \cdot w = ((5)(-2) - (4)(3),\ (5)(3) + (4)(-2))$ implicando $z \cdot w = (-22,\ 7)$.
2. Si $z = (-1, 2)$ y $w = (1, 4)$, entonces, $z + w = (0, 6)$ y $z \cdot w = (-1 - 8, -4 + 2) = (-9, -2)$.

Actividad 4.

1. Si $u = (4, 3)$ y $v = -3 + 2i$ calcula $u + v$, $u \cdot v$, $v \cdot u$, v^2, y realiza una representación gráfica de $u + v$.
2. Para $u = (-5, 5)$ y $v = (3, 4)$
   (a) Realiza la representación en el plano complejo para u y v.
   (b) Determina la medida del segmento que une al punto $(0, 0)$ con el punto $(-5, 5)$.
   (c) Encuentra el ángulo formado entre dicho segmento y el eje positivo horizontal.
   (d) Determina la medida del segmento que une al punto $(0, 0)$ con el punto $(3, 4)$.
   (e) Estima el ángulo formado entre dicho segmento y el eje positivo horizontal.

Al hablar de vectores es común que aparezcan las palabras "magnitud, dirección y sentido". La magnitud corresponde a la medida del segmento dirigido (por ejemplo, el que semarcó con azul en el gráfico). La dirección o argumento del complejo (vector) corresponde a la medida del ángulo respecto al eje positivo horizontal (eje real). ¿ A qué corresponde el sentido?



Definición 7 *Sea* $z = (a, b)$ *decimos que la magnitud de* z *es* $\|z\| = \sqrt{a^2 + b^2}$ *y que el argumento de* z *es* $\arg(z) = \theta = \tan^{-1} \frac{b}{a}$, *donde* θ *es el ángulo medido respecto al eje positivo real.*

Nota: $\theta = \begin{cases} \tan^{-1}\frac{b}{a}, & \text{si} \quad a > 0, \\ \pi + \tan^{-1}\frac{b}{a}, & \text{si} \quad a < 0, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{si} \quad a = 0 \text{ y } b > 0, \\ \frac{3\pi}{2}, & \text{si} \quad a = 0 \text{ y } b < 0. \end{cases}$

Actividad 5.

1. Representar en un plano cartesiano los siguientes números complejos:

   (a) $z = (0, 1)$ (b) $w = \left(3, 3\sqrt{3}\right)$ (c) $q = (4, -4)$

2. Determinar la magnitud y dirección para cada uno de los complejos del punto anterior.

3. Si al segmento dirigido $(0, 1)$ lo rotamos $\frac{\pi}{2}$ (en sentido positivo y con centro en el punto $(0, 0)$) tendríamos como imagen el segmento dirigido $(1, 0)$. Este proceso lo denotaremos como $\mathcal{R}_{\frac{\pi}{2}}\langle(0, 1)\rangle = (1, 0)$. Bajo esta idea determinar

   (a) $\mathcal{R}_{\frac{\pi}{2}}\langle(4, -4)\rangle =$
   (b) $\mathcal{R}_{\frac{\pi}{2}}\langle(-5, 3)\rangle =$
   (c) $\mathcal{R}_{\frac{\pi}{2}}\langle(2, -5)\rangle =$
   (d) $\mathcal{R}_{\pi}\langle(4, -4)\rangle =$
   (e) $\mathcal{R}_{\pi}\langle(-5, 3)\rangle =$
   (f) $\mathcal{R}_{\pi}\langle(2, -5)\rangle =$

4. ¿Cuál es la relación entre $\mathcal{R}_{\pi}\langle(a, b)\rangle$ y $-a - bi$?

5. Si $\|z\| = 5$ y su argumento es $Arg\,(z) = \frac{2\pi}{3}$, escribir z como un complejo de la forma $a + bi$.

6. Escribir un vector (a, b) cuya magnitud sea igual a 1 y que tenga la misma dirección del complejo $(4, 3)$.

Definición 8 *Decimos que el conjugado de* $z = a + bi$ *es* $\overline{z} = a - bi$.

Theorem 9 $z \cdot \overline{z} = \|z\|^2$.

Demostración. Si $z = a + bi \Longrightarrow z \cdot \overline{z} = (a - bi)(a + bi) = a^2 + b^2 = \left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)^2 = \|z\|^2$.

Ejemplos.

1. Si $w = 2 - 4i$ entonces $\overline{w} = 2 + 4i$.

2. Si $\alpha = -3 + 5i$ entonces $\overline{\alpha} = -3 - 5i$.

3. Si $z = 3$ entonces $\overline{z} = 3$.

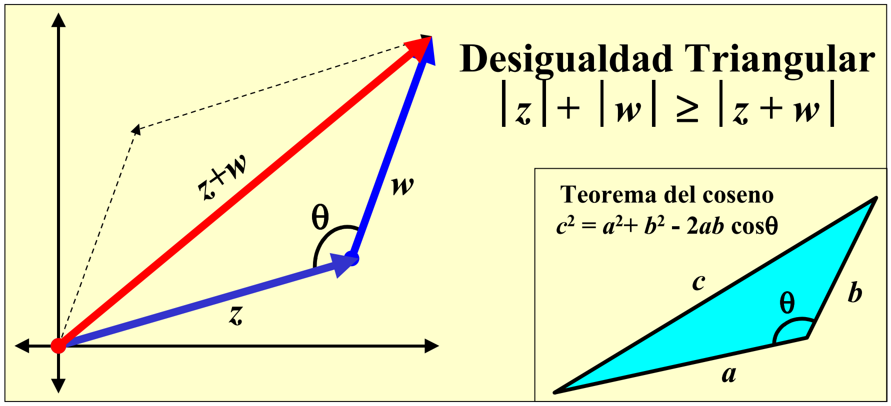
   Teniendo en cuenta los tres ejemplos anteriores

4. $w \cdot \overline{w} = (2)^2 + (-4)^2 = 20$.

5. $\alpha \cdot \overline{\alpha} = (-3)^2 + (5)^2 = 34$.

6. $\overline{\alpha} \cdot \alpha = \alpha \cdot \overline{\alpha} = 34$ (Propiedad conmutativa).

Theorem 10 *Si* z, w *son números complejos entonces* $\|z\| + \|w\| \geq \|z + w\|$.



Demostración. Desarrollando el cuadrado del binomio $(\|z\|+\|w\|)^2$

$$\begin{array}{rcl}(\|z\|+\|w\|)^2 & = & \|z\|^2+\|w\|^2+2\|z\|\|w\|, \qquad \text{como } 1\geq -\cos\theta \\ (\|z\|+\|w\|)^2 & \geq & \|z\|^2+\|w\|^2-2\|z\|\|w\|\cos\theta,\end{array}$$

y según el teorema del coseno

$$\|z+w\|^2 = \|z\|^2+\|w\|^2-2\|z\|\|w\|\cos\theta.$$

de las dos últimas se deduce

$$\begin{array}{rcl}(\|z\|+\|w\|)^2 & \geq & \|z+w\|^2 \qquad \text{Nótese que } (\|z\|+\|w\|) \text{ y } \|z+w\| \text{ son reales positivos} \\ \|z\|+\|w\| & \geq & \|z+w\|. \quad \blacksquare\end{array}$$

Actividad 6.
1. ¿Bajo qué condiciones se cumple que un complejo es igual a su conjugado?
2. ¿Cuál es la relación entre arg(z) y $arg(\bar{z})$
3. Si $\theta = \arg(z)$, ¿A qué equivale $\mathcal{R}_{-2\theta}\langle z\rangle$?
4. Calcular $w^{-1}, w^{-2}, w^2, w^3, w^4$ sabiendo que $w = 2-4i$

1.3.1 Otras representaciones

Si tomamos un complejo $z=(a,b)$, observando la representación en el plano podemos concluir que $a = r\cos\theta \ \wedge\ b = r\operatorname{sen}\theta$ siendo $r=\|z\|$. Luego:

$$\begin{array}{rcl} z & = & a+bi \\ & = & \|z\|\cos\theta+\|z\|\operatorname{sen}\theta i \\ & = & \|z\|[\cos\theta+\operatorname{sen}\theta i] \\ & = & \|z\|(\cos\theta,\operatorname{sen}\theta)\end{array}$$

Observece que dada la magnitud de un complejo y su argumento podemos escribirlo de la forma $a+bi$.

Theorem 11 (Teorema de Moivre) $[r(\cos\theta,\operatorname{sen}\theta)]^n = r^n(\cos(n\theta),\operatorname{sen}(n\theta))$.

La demostración del teorema anterior se realizó por inducción matemática siendo n un entero positivo y r un número real. Reduciremos la idea asumiendo r como la magnitud de un número complejo, de este modo, dicho teorema nos será de utilidad para determinar potencias n-ésimas.
Ejemplo.

1. Calcular z^5 si $z=(\sqrt{3},1)$. Determinando el argumento de z y su magnitud podemos afirmar que $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6}, sen\frac{\pi}{6}\right)$, entonces

$$z^5 = 2^5\left(\cos\frac{5\pi}{6}, sen\frac{5\pi}{6}\right) = 32\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{32}{2}\left[-\sqrt{3}+1i\right] = \left(-16\sqrt{3},16\right).$$

Definición 12 *Se dice que $z = re^{\theta i}$ es la representación polar de un complejo z para el cual $\|z\| = r \wedge \arg(z) = \theta$.*

Según la definición anterior podemos pensar que $z^n = \left(re^{\theta i}\right)^n$ y si aplicando las propiedades de la potenciación obtenemos $z^n = r^n e^{n\theta i}$. Compara el teorema de Moivre con la expresión para la potencia n-ésima de z. ¿Qué puedes concluir?
Observa que $r^n e^{n\theta i} = r^n\left(\cos(n\theta), \operatorname{sen}(n\theta)\right)$.
Actividad 7.

1. Escribir en la forma polar cada uno de los siguientes números complejos

   (a) $z = (0, 1)$ (b) $w = \left(3, 3\sqrt{3}\right)$ (c) $q = (4, -4)$

2. Calcular z^{-1}, z^2, z^5 si

   (a) $z = 3e^{\frac{\pi}{2}i}$
   (b) $z = \frac{1}{2}e^{\frac{5}{4}\pi i}$
   (c) $z = e^{-\frac{3}{4}\pi i}$
   (d) $z = e^{20\pi i}$

3. Calcular $z \cdot w$, z/w expresando el resultado en la forma polar.

   (a) $z = e^{\frac{\pi}{2}i}$ y $w = e^{\frac{3\pi}{2}i}$
   (b) $z = 3$ y $w = 2e^{\frac{5\pi}{4}i}$
   (c) $z = i$ y $w = \left(-3, \sqrt{3}\right)$
   (d) $z = (0, 1)$ y $w = e^{\frac{5\pi}{6}i}$

4. Analice cada una de las siguientes igualdades y establezca si son verdaderas o falsas. Justificar.

   (a) $\|z \cdot w\| = \|z\| \|w\| \wedge \arg(z \cdot w) = \arg(z)\arg(w)$
   (b) Siendo $w \neq 0$ entonces $\left\|\dfrac{z}{w}\right\| = \dfrac{\|z\|}{\|w\|} \wedge \arg(z/w) = \arg(z) - \arg(w)$
   (c) $\|z + w\| = \|z\| + \|w\|$

5. Escribir un contraejemplo para la parte (c) del ejercicio anterior.
6. Escribir $e^{20\pi i}$ en la forma cartesiana.
7. ¿Será verdad que $e^{\frac{7}{4}\pi i} = e^{-\frac{\pi}{4}i} = e^{\frac{23}{4}\pi i}$?
8. ¿Será verdad que $re^{\theta i} = e^{(\theta + 2k\pi)i}$ siendo $k = 0, 1, 2, 3, 4, ...$?
9. Si $z = 3e^{\theta i}$ y $w = re^{\frac{\pi}{2}i}$, calcular los valores de r y de θ para los cuales se cumple que $z = w$.
10. Sabiendo que $\|z\| = 5$, $\arg(w) = \frac{2}{3}\pi$ y $z = w$, escribir el complejo z en la forma polar y en la forma cartesiana.

1.3.2 La raíz de un número complejo.

Supongamos que queremos encontrar los complejos cuya $n-$ésima potencia ($n \in Z^+$) sea igual a un complejo z. En particular, z puede representarse como $z = re^{\theta i}$ que equivale a $z = re^{(\theta + 2k\pi)i}$ siendo $k = 0, 1, 2, 3, ...$ Nuestro problema equivale a encontrar las raíces $n-$ésimas de z. Supongamos que $w = r_o e^{\mu i}$ es el complejo que da solución a nuestro problema (r_0 es un real no negativo). Entonces

$$\begin{aligned}\left(r_0 e^{\mu i}\right)^n &= re^{(\theta + 2k\pi)i}, \\ r_0^n e^{n\mu i} &= re^{(\theta + 2k\pi)i},\end{aligned}$$

y para que la igualdad se cumpla se debe tener que

1. $r_0^n = r$ lo que implica $r = \sqrt[n]{r_0}$
2. $n\mu$ =implicando $\mu = \frac{1}{n}(\theta + 2k\pi)$ con $k = 0, 1, 2, 3...$

Ejemplo 1.
Encontrar $\sqrt[3]{i}$. Este problema equivale a encontrar los complejos que elevados al cubo sean iguales a $e^{\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)i} = (0,1)$ siendo $k = 0, 1, 2, ...$
Teniendo en cuenta la propuesta anterior tendríamos que la magnitud de dicho complejo es $r_0 = 1$ porque $\|i\| = 1$.

1. Para $k = 0$ entonces $\mu = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2}\right)$ lo que implica la primera solución $w_0 = e^{\frac{\pi}{6}i}$.
2. Para $k = 1$, $\mu = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi\right) = \frac{5\pi}{6}$ entonces $w_1 = e^{\frac{5\pi}{6}i}$.
3. Para $k = 2$, $\mu = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2} + 4\pi\right) = \frac{3\pi}{2}$ entonces $w_2 = e^{\frac{3\pi}{2}i}$.
   Observa que $w_1 \neq w_2 \neq w_3$ y que el cubo de cualquiera de los tres es igual a i.
   Se deja al lector el verificar que para $k = 3$ se obtiene el mismo recultado que cuando $k = 0$ y para $k = 4$ se llega al mismo complejo que cuando $k = 1$ y así sucesivamente.

Actividad 8.

1. Escribir los siguientes complejos en la forma cartesiana:
   (a) $w_1 = e^{\frac{\pi}{6}i}$. (b) $w_2 = e^{\frac{5\pi}{6}i}$. (c) $w_3 = e^{\frac{3\pi}{2}i}$.
2. Realizar una representación de los complejos del punto anterior en un mismo plano.
3. Calcular la tercera potencia para cada uno de los complejos mencionados en el primer punto.
4. Calcular y expresar en la forma cartesiana:
   (a) $\sqrt[2]{i}$.
   (b) $\sqrt{i+1}$.
   (c) El complejo cuyo cubo es igual a $27\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
   (d) El complejo cuyo cuadrado es igual a $\left(-16, 16\sqrt{3}\right)$.
5. Averigua las propiedades de los espacios vectoriales y determina si el conjunto de los complejos es o no un espacio vectorial.
6. ¿Cómo se realiza la suma de vectores de manera gráfica?
7. ¿Cómo se realiza el producto de complejos de manera gráfica?

Por:
Marcos Alejo Sandoval Serrano
Lic. Matemáticas UIS.
Especialista en Informática Educativa

CIDCA & UNILIBERTADORES